FÓRMULAS FUNDAMENTALES EN TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

Ref.:

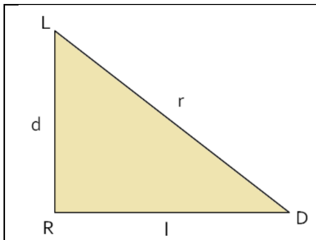
a) Tabla Rinehart, Mathematical tables, formulas y curvas
b) Apuntes del autor.

A.- Introducción:

La trigonometría esférica es fundamental para deducir y entender las diferentes fórmulas que intervienen en la resolución de los diversos problemas de navegación astronómica.

Es necesario recordar algunos conceptos de trigonometría plana:

1.- En un triángulo RLD:

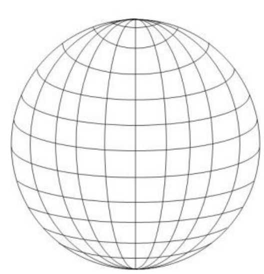
	$sen\ D = \frac{d}{r}$	$csc\ D = \frac{r}{d}$
	$cos\ D = \frac{l}{r}$	$sec\ D = \frac{r}{d}$
	$tan\ D = \frac{d}{l}$	$ctn\ D = \frac{l}{d}$

2.- Algunas fórmulas de reducción:

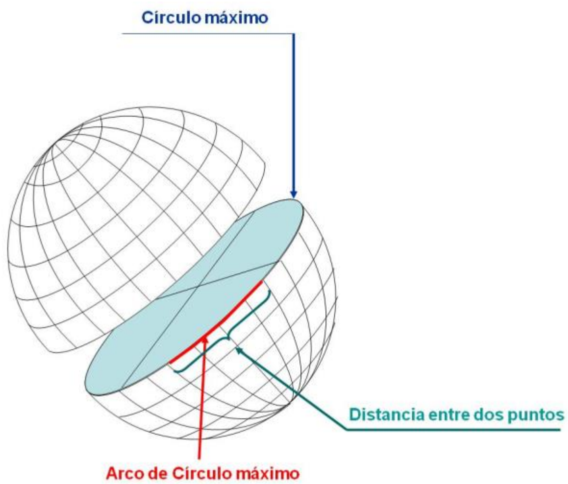
sen (90 + R) = + cos R sen (90 - R) = + cos R	csc (90 + R) = + sec R csc (90 - R) = + sec R
cos (90 + R) = - sen R cos (90 - R) = + sen R	sec (90 + R) = - csc R sec (90 - R) = + csc R
tan (90 + R) = - ctn R tan (90 - R) = + ctn R	ctn (90 + R) = - tan R ctn (90 - R) = + tan R

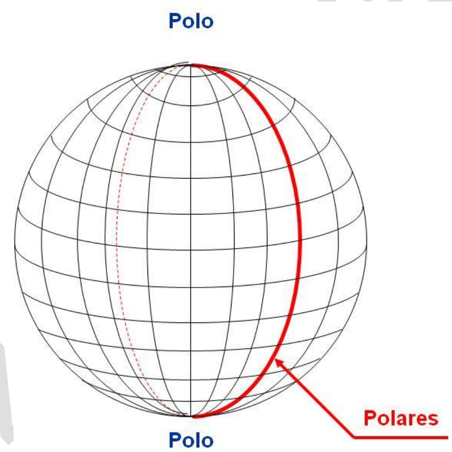
B.- Conceptos preliminares

1.- **Esfera:** Es un sólido limitado por una superficie curva, cuyos puntos equidistan de un punto interior llamada centro. Toda sección plana de una esfera es un circulo.

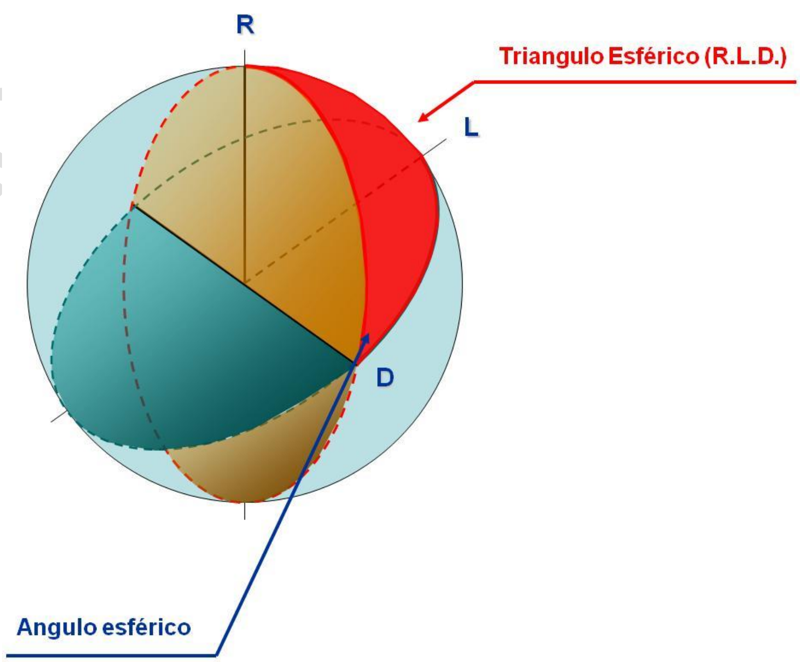


2.- **Círculos máximo:** es la superficie plana de una esfera que, pasando por el centro de esta, se divide en dos partes iguales.
3.- **Arco de Círculo Máximo:** Es una parte o segmento de una circunferencia máxima
4.- **Distancia entre dos puntos:** Situados en la superficies de un esfera es la medida del arco del círculo máximo que los une, es la menor distancia entre ellos.
5.- **Polos de un Esfera:** Cualquier par de puntos de su superficie que están ubicadas diametralmente opuestos.
6.- **Polares:** Círculos máximos cuyo plano perpendicular al diámetro que un a los polos



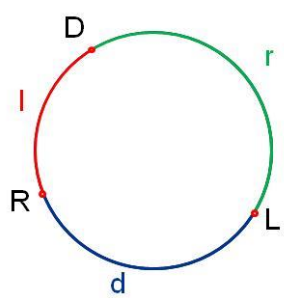


7.- **Angulo esférico:** Son los formados en la superficie de una esfera por dos arcos de círculo máximo que se cortan.
8.- **Triangulo esférico:** Es aquella parte de la superficie de la esfera, encerrada por tres circunferencias máximas (R.L.D., r,l,d,)
9.- **Unidad de medidas:** Es la medida angular llamado “grado de arco”.

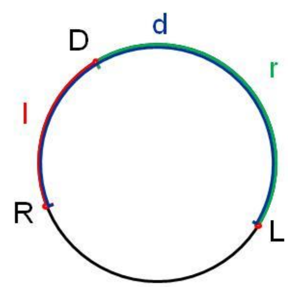


10.- **Triangulo esférico**

a. Si tres puntos de la superficie esférica son unidos por arcos de círculo máximo menores a 180º, la figura obtenida se denomina triángulo esférico.
b. Los lados del polígono así formado se expresan por conveniencia como ángulos cuyo vértice es el centro de la esfera y no por su longitud.
c. En un triángulo esférico los ángulos cumplen que: 180° < R + L + D < 540°



Suma 540°



Suma 180°

C.- Reglas

Triángulo esférico rectangular.

11.- **Regla de Manduit.**

En un triángulo esférico rectangular.

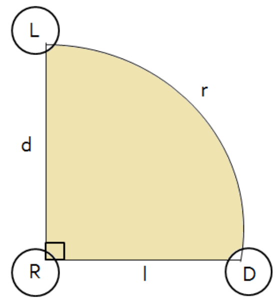
Reglas:
"El coseno del elemento del medio es igual al producto de la cotangente de los elementos adyacentes", teniendo cuidado de cambiar las funciones con la cofunción[1] si alguno de los elementos está al *lado del ángulo recto*".

"El coseno del elemento del medio es igual al producto de los senos de los elementos opuestos teniendo cuidado de cambiar las funciones con la cofunción[2] si alguno de los elementos está al *lado del ángulo recto*".

Para definir el elemento del medio se considera el ángulo recto no existe.

Ejemplo:

[1] Seno -> Coseno
[2] Tangente -> Cotangente



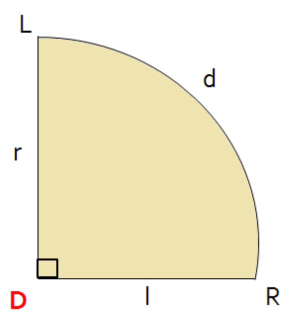
En un Triángulo esférico se conoce R = 90°; L = 110°y D = 80°.
Calcular los ángulos r, l y d.

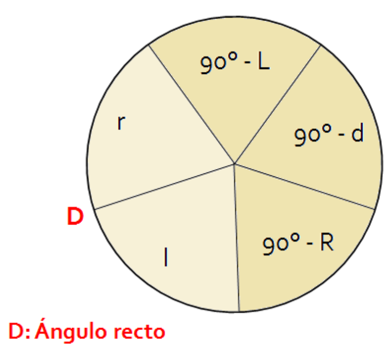
cos **r** = ctg L x ctg D	r = 93°,67964
cos L = sen D x cos **l**	l = 110°,322037
cos D = sen L x cos **d**	d = 70°,35096

12.- **Analogías de Napier.**
En un triángulo esférico rectangular.

Sin considerar el ángulo recto D, el triángulo esférico RLD, está formado por 5 partes constituyentes que, si se colocan una tras otra aparece la segunda figura, quedando en el siguiente orden: r, l, R, d, L, agregando (90° - ___) al lado d (contrario al ángulo recto D) y a los ángulos R y L.

Cualquiera de las partes de este círculo se puede llamar parte media, las dos parte vecinas se llamarían partes adyacentes mientras que dos restantes se llamarían partes opuestas, entonces podemos expresar las reglas de Napier,





Reglas:
"El seno de cualquier parte media es igual (=) al producto de las tangentes de las partes adyacentes"

sen l = tan r x tan (90 – R)

sen l = tan r x ctg R

“El seno de cualquier parte media es igual (=) al producto de los cosenos de las partes opuestas”
sen (90 – R) = cos r x cos (90 – L)
sen (90 – R) = cos r x sen L

Triángulo esférico cualquiera

13.- **Ley de los senos.**

En un triángulos esférico cualquiera

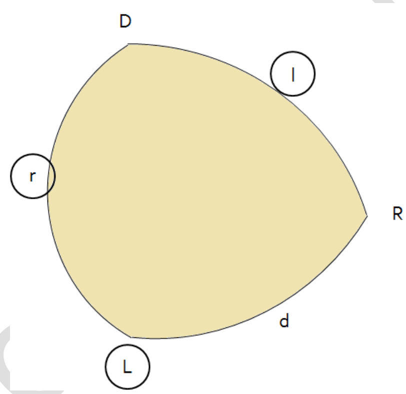
$$\frac{\text{sen r}}{\text{sen R}} = \frac{\text{sen l}}{\text{sen L}} = \frac{\text{sen d}}{\text{sen D}}$$

Ejemplo: si r = 30°; l = 110° y L = 55°

Calcular R

$$sen\ R = \frac{sen\ r\ x\ sen\ L}{sen\ l}$$

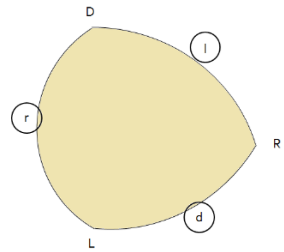
Resultado R = 25,8°



14.- **Ley “coseno de los lados”.**

Se emplea cuando en un triángulo esférico cualquiera, hay entre valores conocidos e incógnitas, mayoría de lados, se aplica la relación *cosenos de los lados*, siempre que la incógnita sea el ángulo que interviene o el lado opuesto a ese ángulo”.

Regla:
“El coseno del lado opuesto al ángulo que interviene es igual al producto (x) de los cosenos de los otros dos lados más (+) el producto (x) de los senos de esos mismos lados por (x) el coseno del ángulo que interviene”.



Ejemplo:
Se conocen los tres lados r, l y d. se pide los tres ángulos R, L y D.

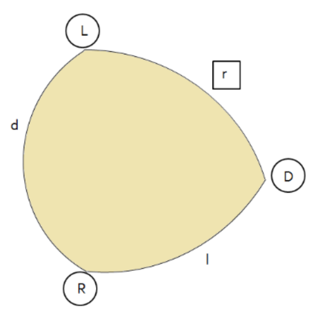
Cálculo de R
R = Ángulo que interviene o incógnita.
r = Lado opuesto al ángulo que interviene.
cos **r** = cos l x cos d + sen l x sen d x cos R
cos **R** = cos r x cse l x csc d – ctn l x ctn d

Si r = 48°; l = 105°; d = 80°.
Respuesta: R = 41°,351707
L= 120°, 8247
D = 61°,107218.

15.- **Ley “coseno de los ángulos”.**

Cuando en un triángulo esférico cualquiera, hay entre valores conocidos e incógnitas, mayoría de ángulos, se aplica la relación coseno de los ángulos, siempre que la incógnita sea el lado que interviene o el ángulo opuesto a ese lado que interviene.

Regla:
“Coseno del ángulo opuesto al lado que interviene es igual a menos (-) el producto (x) de los cosenos de los otros dos ángulos más (+) el producto (x) de los senos de esos mismos ángulos multiplicado (x) por el coseno del lado que interviene”



cos R = - cos L x cos D + sen L x sen D x cos **r**
cos L = - cos R x cos D + sen R x sen D x cos **l**
cos D = - cos R x cos L + sen R x sen L x cos **d**

Ejemplo:
R =54°; L = 110°; D = 80°

Calcular r, l y d.

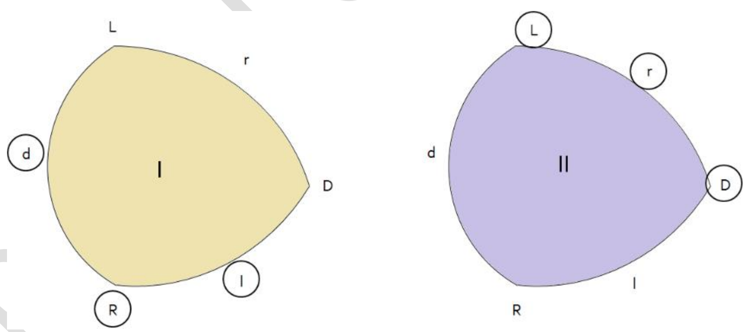
Respuestas:
r = 50°, 5683
l = 115°,421997
d = 92°, 06445

16.- **Relación de los cuatro elementos consecutivos**

Cuando en un triángulo esférico cualquiera de los valores conocidos y la incógnita están dispuestos consecutivamente, se aplica esta regla, siempre que la incógnita sea uno de los extremos de los cuatro elementos consecutivos.

Regla caso I
“La cotangente del lado extremo (incógnita) por el seno del otro lado que interviene, es igual a la cotangente del ángulo extremo por el seno del otro ángulo que interviene más (+) el producto del coseno de los elementos del medio”

Regla caso II
“La cotangente del ángulo extremo (incógnita) por el seno del otro ángulo que interviene, es igual a la cotangente del lado extremo por el seno del otro lado que interviene menos (-) el producto del coseno de los elementos del medio”



Caso I

ctn **L** x sen R = ctn l x sen d – cos R x cos d

Despejando L:
ctn **L** = ctn l x sen d x csc R – ctn R x cos d

ctn **D** x sen R = ctn d x sen l – cos R x cos l

Despejando D:
ctn **D** = ctn d x sen l x csc R – ctn R x cos l

Caso II
ctn **l** x sen r = ctn L x sen D – cos D x cos r
ctn **d** x sen r = ctn D x sen L – cos L x cos r

Ejemplo:
R = 55° 17’; l = 110°; d = 64° 14’ 51”. Calcular r, L y D.
Respuesta: r = 71°,6; L= 124°,9865; D=51°,74588.

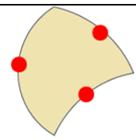
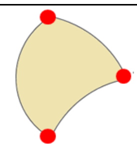
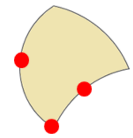
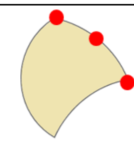
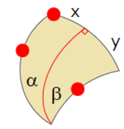
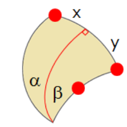
Ejemplo:
l = 71°24’; d =124°47’; R=137°35’

Calcular L
ctn **L** = ctn l x sen d x csc R – ctn R x cos d
L = 101°,66

Calcular D
ctn **D** = ctn d x sen l x csc R – ctn R x cos l
D = 122°,0822

Calcular r
cos r = cos l x cos d + sen l x sen d x cos R (“Ley coseno de los lados”)
r = 139°,1681219

Resumen:

						
Gráfica-mente	si	no	si	si	si	no
Fórmulas	Coseno de los lados	Coseno de los ángulos	Los ángulos por los 4 elementos consecutivos. El lado por el coseno de los lados.	Los lados por los 4 elementos consecutivos. El ángulo por coseno de los angulo	El ángulo por la ley de los senos. Incógnita por Napier.	El lado por ley del seno. Incógnitas por Napier

1. **Coseno de los lados:** “El coseno del lado opuesto al ángulo que interviene es igual al producto (x) de los cosenos de los otros dos lados más (+) el producto (x) de los senos de esos mismos lados por (x) el coseno del ángulo que interviene”.

2. **Coseno de los ángulos:** “Coseno del ángulo opuesto al lado que interviene es igual a menos (-) el producto (x) de los cosenos de los otros dos ángulos más (+) el producto (x) de los senos de esos mismos ángulos multiplicado (x) por el coseno del lado que interviene”.

3. **Relación de los 4 elementos consecutivos (Incógnita lado):** “La cotangente del lado extremo (incógnita) por el seno del otro lado que interviene, es igual a la cotangente del ángulo extremo por el seno del otro ángulo que interviene más el producto del coseno de los elementos del medio”

4. **Relación de los 4 elementos consecutivos (incógnita ángulo):** “La cotangente del ángulo extremo (incógnita) por el seno del otro ángulo que interviene, es igual a la cotangente del lado extremo por el seno del otro lado que interviene menos el producto del coseno de los elementos del medio”

5. **Ley de los senos:** $\frac{\operatorname{sen} r}{\operatorname{sen} R} = \frac{\operatorname{sen} l}{\operatorname{sen} L} = \frac{\operatorname{sen} d}{\operatorname{sen} D}$

6. **Regla de Napier (Triángulo esférico rectangular).**
   a. “El seno de cualquier parte media es igual (=) al producto de las tangentes de las partes adyacentes”
   b. “El seno de cualquier parte media es igual (=) al producto de los cosenos de las partes opuestas”